数理解析研究所講究録
161巻 1972年 125-138

楕円型作用素の固有値分布と負の固有値について

東大 理 田村 英男

§1 序

Aを 定義域 $\mathcal{D}(A)=H^m(R^n)$:(order $m>0$のSobolev空間)とする $L^2(R^n)$の中の 正値 自己共役楕円型作用素とする(詳しい仮定は後で与える)

$p(x)$を 非負の 実数値函数 で $H^{m-\varepsilon}(R^n)\longrightarrow L^2(R^n)$ $(\varepsilon>0)$ への 作用素として完全連続 と仮定する

任意の$\lambda>0$に対して

$$A_\lambda = A-\lambda p(x) \quad \text{とおく.}$$

このとき A_λは $\mathcal{D}(A_\lambda)=\mathcal{D}(A)=H^m(R^n)$として 自己共役作用素. で 可算個の負の固有値を もつ.(もし存在するならば. 唯一の集積点は 0 である)

今 任意に固定された $r>0$ に対して $N_r(\lambda)$を $(-\infty,-r)$に存在する A_λの負の 固有値の個数を表わすものとする. $N_r(\lambda)$ の $\lambda\to\infty$としたときの漸近的

挙動を調べるのが本稿の目的である.
この問題は次の固有値問題の固有値漸近分布と密接に関連する.

(1.1) $(A+r)\, u = \lambda\, p \cdot u.$

$n_r(\lambda)$ を (1.1)の $(0.\lambda)$ に存在する固有値の個数とすれば. $N_r(\lambda) = n_r(\lambda)$ であることが知られている

一般に $A - p(x)$ の負の固有値は $p(x)$ の無限遠における減衰状態に関係してくる. この事実から $N_r(\lambda) = n_r(\lambda)$ ~~と~~. $p(x)$ の無限遠における減衰状態も密接に関係しているように思われる. (1.1) の固有値漸近分布を $p(x)$ が滑らかな場合について. agmon [1] の方法で 調べ, 更に Birman-Solomyak 等の 補題によって $p(x)$ が singular の場合に 摂動論的方法によって拡張する.

§2. (仮定) と(定理).

$$A(x.D) = \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha(x) D^\alpha \quad \left(D = \frac{\partial}{i\partial x}\right) \quad \text{on } R^n$$

(仮定)

(i) $a_\alpha(x) \in \mathcal{B}^\infty(R^n)$; 無限回微分可能, 微係数有界.

(ii) $a_\alpha(x) = a_\alpha + b_\alpha(x)$; a_α はある正定数. $b_\alpha(x)$ は $|D^j b_\alpha(x)| \le C(j)\, |x|^{-s} \ (s>0) \quad |x| \ge R > 0$. を満足する.

(iii) 一様楕円型. $A'(x,\xi)=\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\xi^\alpha \geq C|\xi|^m$.

(iv) 形式的自己共役でかつ非負. 即ち $(A(x,D)u,u)\geq 0$ for $^\forall u\in C_0^\infty(R^n)$

(v). $A_0(D)=\sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha D^\alpha$ とおく. $A_0(D)$ は明らかに一様楕円型作用素でかつ $A_0(\xi)\geq 0$ を満足するものとする.

$A(x,D)$. $A_0(D)$ は一意的自己共役拡張をもち. それらを A, A_0 をおく. $\mathcal{D}(A)=\mathcal{D}(A_0)=H^m(R^n)$.

(記号) $p(x)\in K_\ell$ ($\ell>0$)

$\Longleftrightarrow$ (i) $p(x)>0$. $p(x)\in\mathcal{B}^\infty(R^n)$

(ii) $\frac{c_2}{1+|x|^\ell}\leq p(x)\leq\frac{c_1}{1+|x|^\ell}$

(iii) $|D^j p(x)|\leq C(j)\,p(x)$.

(定理)

Aが上の仮定を満足し. $p(x)\in K_\ell$ のとき. 次のことが成立する

(i) $\ell>m$ のとき

$n_r(\lambda)=N_r(\lambda)=(2\pi)^{-n}\int w(x)p(x)^{\frac{n}{m}}dx\,\lambda^{\frac{n}{m}}+o(\lambda^{\frac{n}{m}})$.

$w(x)=\mathrm{meas}\{\xi \mid A'(x,\xi)\leq 1\}$ $A'(x,\xi)$ は $A(x,D)$ の主部

(ii) $\ell=m$ のとき

$n_r(\lambda)=N_r(\lambda)=(2\pi)^{-n}\int_{\lambda p(x)\geq 1} w(x)(\lambda p(x)-1)^{\frac{n}{m}}dx+o(\lambda^{\frac{n}{m}}\log\lambda)$

特に主部が定数係数で $p(x)$ が十分遠方で $|x|^{-m}$ に等しい

とき

$$n_r(\lambda)=N_r(\lambda)=(2\pi)^{-n}\,\mathfrak{s}\,\frac{1}{m}\,w\,\lambda^{\frac{n}{m}}\log\lambda+o(\lambda^{\frac{n}{m}}\log\lambda)$$

$w=\mathrm{meas}\{\xi \mid A'(\xi)\le 1\}$；$\mathfrak{s}$ は単位球の表面積 $\{n=1$ のとき $\mathfrak{s}=2\}$

(iii) $0<l<m$, でかつ $p(x)$ が十分遠方で $C|x|^{-l}$ に等しいとき $(C>0)$.

$$n_r(\lambda)=N_r(\lambda)=C_r\lambda^{\frac{n}{l}}+o(\lambda^{\frac{n}{l}})$$

$$C_r=(2\pi)^{-n}\frac{1}{n}\,\mathfrak{s}\cdot\int(A_0(\xi)+r)^{-\frac{n}{l}}d\xi\; C^{\frac{n}{l}}$$

特に $A_0(\xi)$ が 有次形の場合

$$C_r=(2\pi)^{-n}\frac{1}{m}\,\mathfrak{s}\cdot\left\{\Gamma\left(\frac{n}{m}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{n}{l}-\frac{n}{m}\right)\Big/\Gamma\left(\frac{n}{l}\right)\right\}w_0\,r^{\frac{n}{m}-\frac{n}{l}}$$

$$w_0=\mathrm{meas}\{\xi;\ A_0(\xi)\le 1\}.$$

この定理から Birman-Solomyak-Borzov([3] [4]) の補題によって $p(x)$ が Singular の場合に拡張出来る.

例えば. 次のような系が成立する

(系) 1° $\{Q_k\}$：単位 Cube；R^n をおおう.

$$\sigma_{s,k}=\|p\|_{(s,Q_k)}\quad (s=1.\ \text{if } m>n,\ s>\frac{n}{m}\ \text{if } m\le n).$$

$\|\ \|_{(s,Q_k)}$ は Q_k における L^s-norm.

$$b_s(p)=\sum_k(\sigma_{s,k})^{\gamma}<\infty\quad (\gamma=\frac{n}{m}).\ \text{のとする.}$$

$$p(x)=p_\varepsilon^{(1)}(x)+p_\varepsilon^{(2)}(x)\qquad (\varepsilon>0).$$

で $p_\varepsilon^{(1)}(x)\in K_l$, $b_s(p_\varepsilon^{(2)})<\varepsilon$ を満足するように 分解出来るとすると, $(A+r)u=\lambda pu$ の

漸近分布は

$$N_r(\lambda)=n_r(\lambda)=(2\pi)^{-n}\int p(x)^{\frac{n}{m}}\omega(x)dx\cdot\lambda^{\frac{n}{m}}+o(\lambda^{\frac{n}{m}}).$$

2°. $p(x)=p_\varepsilon^{(1)}(x)+p_\varepsilon^{(2)}(x)+p^{(3)}(x)$ と分解されて

$b_s(p^{(3)})<+\infty$, $p_\varepsilon^{(1)}(x)$ は K_l $(\alpha<l<m)$ に属して

十分遠方において $C|x|^{-l}$ に等しく, $|p_\varepsilon^{(2)}(x)|\le\frac{\varepsilon}{1+|x|^l}$

を満足するならば,

$$N_r(\lambda)=n_r(\lambda)=C_r\lambda^{\frac{n}{l}}+o(\lambda^{\frac{n}{l}})$$ となる.

(C_r は定理の中で定義されたものとする).

[例]: $A=-\Delta$, $p(x)=\frac{1}{|x|}$ on R^3.

$A_\lambda=-\Delta-\frac{\lambda}{|x|}$. このとき $m=2$, $n=3$, $l=1$ として

$C_r=\frac{1}{24}r^{-\frac{3}{2}}$, 従って $N_r(\lambda)=\frac{1}{24}r^{-\frac{3}{2}}\lambda^{\frac{3}{2}}+o(\lambda^{\frac{3}{2}})$

一方, A_λ の負の固有値は $\mu=-\lambda^2\cdot\frac{1}{4j^2}$ (多重度 j^2)

$-\frac{\lambda^2}{4j^2}<-r$ より $j<\frac{\lambda}{2}r^{-\frac{1}{2}}=j_0$

従って

$$n_r(\lambda)\sim\sum_{j=1}^{j_0}\sim\frac{1}{6}\left(\frac{\lambda}{2}r^{-\frac{1}{2}}\right)\left(\frac{\lambda}{2}r^{-\frac{1}{2}}+1\right)(\lambda r^{-\frac{1}{2}}+1)$$
$$=\frac{1}{24}r^{-\frac{3}{2}}\lambda^{\frac{3}{2}}+O(\lambda^2).$$

§3: 定理の証明.

簡単のため, A が定数係数の場合について証明を与える. 変数係数の場合も全く同様の方法によって証明することが出来る. 証明は i) の場合について行い, ii) の場合について簡単にふれる程度にとどめる.

まず $m>n$, $l>n$. (即ち $p(x)\in L^1(R^n)$) の場合を考える. 一般の場合はこの場合に帰着させる.

$(A+r)u=\lambda p(x)\cdot u$ の固有値を $\{\mu_i\}_{i=1}^{\infty}$ とすれば, 明らかに $p^{\frac{1}{2}}(A+r+\lambda p)^{-1}p^{\frac{1}{2}}$ の固有値は $\{\frac{1}{\mu_i+\lambda}\}$ であり, trace formula

$$\sum_i \frac{1}{\mu_i+\lambda}=\int_{R^n} p(x)\,R_\lambda(x,x)\,dx$$ が成立する.

$R_\lambda(x,y)$ は $(A+r+\lambda p)^{-1}$ の積分核で, $m>n$ であるので, 有界 連続 である. (後述).

Tauber 型定理の適用のために, $R_\lambda(x,x)$ の $\lambda\to\infty$ のときの 漸近的性質を調べる. そのために次の agmon [ ] の補題を出発点とする.

[補題1] (agmon)

T が $L^2(R^n)$ の中の有界作用素で $R(T)$, $R(T^*)$ が $H^m(R^n)$ $(m>n)$ に含まれるとき

(i) T は積分作用素で

$$Tu=\int_{R^n} T(x,y)\,u(y)\,dy \qquad u\in L^2(R^n).$$

$T(x,y)$ は $R^n\times R^n$ の上で一様連続かつ有界.

(ii) $$|T(x,y)|\le \gamma\,(\|T\|_m+\|T^*\|_m)^{\frac{n}{m}}\,\|T\|_0^{1-\frac{n}{m}}$$

($\|\cdot\|_m$ は $L^2\to H^m$ への作用素 norm) //

[補題2] $p(x)\in K_l$. $(l>0)$, A は仮定を満足する. $r>0$ に対して $(A+r)p^{-1}$ は $\mathcal{D}((A+r)p^{-1})=$

$=\{u\in L^2(R^n) \mid p^{-1}u\in H^m(R^n)\}$ を定義域とする.
閉作用素であり, 更に $\forall\lambda>0$ に対して

$$\|((A+r)p^{-1}+\lambda)^{-1}\|_0\le\frac{c}{\lambda}$$ が成立する.

(証明); 前半の主張は $((A+r)p^{-1})^{-1}=p(A+r)^{-1}$ より明らか.
$p(x)\in K_e$ より $p^{\frac12}Ap^{-\frac12}$ は $B^\infty(R^n)$ を係数とする一様楕円型作用素. 従って Gårding's 不等式より

$$Re((p^{\frac12}Ap^{-\frac12}+c)v,v)\ge 0. \quad v\in H^{\frac{m}{2}}(R^n).$$

$\forall u\in\mathcal{D}((A+r)p^{-1})$ に対して

$$Re(\{(A+r+c)p^{-1}+\lambda\}u,u)$$
$$=Re((A+r+c)p^{-1}u,u)+\lambda\|u\|_0^2$$
$$=Re(p^{\frac12}(A+r+c)p^{-\frac12}\cdot p^{-\frac12}u,\ p^{-\frac12}u)+\lambda\|u\|_0^2\ge\lambda\|u\|_0^2$$

($p^{-\frac12}u\in H^m(R^n)$ であるので).

故に $\|((A+r+c)p^{-1}+\lambda)^{-1}\|_0\le\frac{1}{\lambda}$

更に $((A+r)p^{-1}+\lambda)^{-1}=((A+r+c)p^{-1}+\lambda)^{-1}((A+r+c)p^{-1}+\lambda)((A+r)p^{-1}+\lambda)^{-1}$
$=((A+r+c)p^{-1}+\lambda)^{-1}(1+c(A+r+\lambda p)^{-1})$ から

$\|((A+r)p^{-1}+\lambda)^{-1}\|_0\le\frac{c}{\lambda}$ が従う. //

$\varphi(x)$ を次のように定義する. $\varphi(x)\in C_0^\infty(R^n)$ $0\le\varphi(x)\le1$.

$$\varphi(x)\equiv1\ (|x|\le\tfrac12).\quad \varphi(x)\equiv0\quad(|x|\ge1)$$

$x_0\in R^n$ に対して $\varphi_{(x_0,\delta)}(x)=\varphi((x-x_0)/\delta)$ とおく.

(補題)3 $\|\varphi_{(x_0,1)}(A+r+\lambda p)^{-1}\varphi_{(x_0,1)}\|_0\le C(1+\lambda p(x_0))^{-1}$

$\|\varphi_{(x_0,1)}(A+r+\lambda p)^{-1}\varphi_{(x_0,1)}\|_m\le C$

(証明). まず次のことを注意しておく.

$$\varphi(x) \le C\, p(y) \quad \text{for } |x-y|\le 1 .. \quad (p(x)\in K_e).$$

$$\varphi(x_0.1)(A+r+\lambda p)^{-1}\varphi(x_0.1)$$

$$\equiv \varphi(x_0.1)(r+\lambda p)^{-\frac{1}{2}}((r+\lambda p)^{-\frac{1}{2}}A(r+\lambda p)^{-\frac{1}{2}}+1)^{-1}(r+\lambda p)^{-\frac{1}{2}}\varphi(x_0.1)$$

上の注意から $|\varphi(x_0.1)(r+\lambda p)^{-\frac{1}{2}}| \le C\cdot(1+\lambda p(x_0))^{-\frac{1}{2}}$

従って $\|\varphi(x_0.1)(A+r+\lambda p)^{-1}\varphi(x_0.1)\| \le C\cdot(1+\lambda p(x_0))^{-1}$

次に m-normの評価を与える.

$$\varphi(x_0.1)(A+r+\lambda p)^{-1}\varphi(x_0.1)$$

$$=\varphi(x_0.1)(A+r)^{-1}(A+r)p^{-1}((A+r)p^{-1}+\lambda)^{-1}\varphi(x_0.1).$$

$(A+r)p^{-1}((A+r)p^{-1}+\lambda)^{-1}=1-\lambda((A+r)p^{-1}+\lambda)^{-1}$ より

上の補題をつかって.

$$\|\varphi(x_0.1)(A+r+\lambda p)^{-1}\varphi(x_0.1)\|_m \le C. \quad //$$

(iii)を証明するための準備が出来たので これから証明にうつる. まず最初に $p(x)$ が (iii)の仮定を満足すると

for $|x-y|\le \frac{1}{2}p(x)^{-\frac{1}{e}}$

(i) $|p(x)-p(y)| \le C|x-y|\, p(x)^{1+\frac{1}{e}}$

(ii) $|D^j p(x)| \le C(j)\, p(x)^{1+\frac{|j|}{e}}$ が成立する.

$\varphi_\delta(x)=\varphi(((x-x_0)/\delta)\,p(x_0)^{\frac{1}{e}})$ とおく.

以下 $x_0\in R^n$ は任意に固定して考える.

$$\|\varphi_{\frac{1}{2}}(A+r+\lambda p)^{-1}\varphi_{\frac{1}{2}}\|_0 \leq C(1+\lambda p(x_0))^{-1}$$

$$\|\varphi_{\frac{1}{2}}(A+r+\lambda p)^{-1}\varphi_{\frac{1}{2}}\|_m \leq C.$$

上の事実は $p(x)$ の仮定により 補題の証明と全く同様にして証明出来る!

十分小さい $\varepsilon>0$ に対して, $\varphi_{\frac{1}{2}}\cdot\varphi_\varepsilon \equiv \varphi_\varepsilon$. となるから

$$H_\lambda \equiv \varphi_{\frac{1}{2}}(A+r+\lambda p)^{-1}\varphi_\varepsilon - \varphi_\varepsilon(A+r+\lambda p(x_0))^{-1}\varphi_{\frac{1}{2}}$$

$$\equiv \varphi_{\frac{1}{2}}(A+r+\lambda p)^{-1}\varphi_{\frac{1}{2}}\, B_\varepsilon\cdot\varphi_{\frac{1}{2}}(A+r+\lambda p_0)^{-1}\varphi_{\frac{1}{2}}$$

$$+\ \varphi_{\frac{1}{2}}(A+r+\lambda p)^{-1}\varphi_{\frac{1}{2}}\cdot\varphi_\varepsilon(p-p_0)\varphi_{\frac{1}{2}}(A+r+\lambda p_0)^{-1}\varphi_{\frac{1}{2}}$$

ここで $p(x_0)=p_0$. $B_\varepsilon = \varphi_\varepsilon A - A\varphi_\varepsilon$.

(B_ε は $m-1$ 階の微分作用素で, すべての係数は φ_ε に関する微分を含む) $|D^j\varphi_\varepsilon| \leq C(\varepsilon)\,p(x_0)^{\frac{j}{2m}} \leq C(\varepsilon)\,p(x_0)^{\frac{1}{2}}$ より $\|B_\varepsilon\|_{(m-1\to 0)} \leq C(\varepsilon)\,p(x_0)^{\frac{1}{2}}$

$\|\cdot\|_{(m-1\to 0)}$ は $H^{m-1}\to L^2$ への作用素 norm を示す.

$H_\lambda \equiv H_\lambda^{\mathrm{I}} + H_\lambda^{\mathrm{II}}$ とおく.

$$\|H_\lambda^{\mathrm{I}}\|_0 \leq C(\varepsilon)\cdot p(x_0)^{\frac{1}{2}}\cdot(1+\lambda p(x_0))^{-(1+\frac{1}{m})}.$$

$$\|H_\lambda^{\mathrm{I}}\|_m \leq C(\varepsilon)\ p(x_0)^{\frac{1}{2}}(1+\lambda p(x_0))^{-\frac{1}{m}}.$$

$$\|H_\lambda^{\mathrm{II}}\|_0 \leq \varepsilon\cdot C(1+\lambda p(x_0))^{-1}$$

$$\|H_\lambda^{\mathrm{II}}\|_m \leq \varepsilon\cdot C. \qquad \|(H_\lambda^{\mathrm{II}})^*\|_m \leq \varepsilon\cdot C$$

$$\|(H_\lambda^{\mathrm{I}})^*\|_m \leq C(\varepsilon)\,p(x_0)^{\frac{1}{2}}(1+\lambda p(x_0))^{-\frac{1}{m}}$$

上のような 0-norm. m-norm の評価が 補題と $p(x)$ の性質をつかって, 容易に得られる.

従って Agmon の補題を使って

$$|H_\lambda^{I}(x,y)| \le C(\varepsilon)\, p(x_0)^{\frac{1}{\ell}}(1+\lambda p(x_0))^{\frac{n}{m}-1}$$

$$|H_\lambda^{II}(x,y)| \le \varepsilon \cdot C\,(1+\lambda p(x_0))^{\frac{n}{m}-1}$$

一方 Fourier 変換によって

$$(A+r+\lambda p_0)^{-1}u = \int F_{(x_0,\lambda)}(x-y)\,u(y)\,dy$$

$$F_{(x_0,\lambda)}(x) = (2\pi)^{-n}\int e^{ix\cdot\xi}(A(\xi)+r+\lambda p(x_0))^{-1}d\xi.$$

特に (x_0,x_0) において $H_\lambda(x_0,x_0) = R_\lambda(x_0,x_0) - F_{(x_0,\lambda)}(0)$ に注意すれば、十分小さい $\forall\varepsilon>0$ に対して $\exists C(\varepsilon)$, x に対して一様に次の評価が成立する.

$$|R_\lambda(x,x) - F_{(x,\lambda)}(0)| \le C\cdot\varepsilon\,(1+\lambda p(x))^{\frac{n}{m}-1}$$
$$+\ C(\varepsilon)\cdot p(x)^{\frac{1}{\ell}}(1+\lambda p(x))^{\frac{n}{m}-1}.$$

次のような積分計算は容易に証明出来る.

$$\int p(x)^{1+\frac{1}{\ell}}(1+\lambda p(x))^{\frac{n}{m}-1}dx = O(\lambda^{\frac{n}{\ell}-1-\theta}) \quad (\theta>0)$$

$$\int p(x)\,(1+\lambda p(x))^{\frac{n}{m}-1}dx = O(\lambda^{\frac{n}{\ell}-1})$$

$$\int p(x)\,F_{(x,\lambda)}(0)\,dx = C\lambda^{\frac{n}{\ell}-1} + o(\lambda^{\frac{n}{\ell}-1})$$

$$C = (2\pi)^{-n}\cdot S\cdot\frac{\pi}{\ell}\cdot\left(\sin\frac{n}{\ell}\pi\right)^{-1}\int(A(\xi)+r)^{-\frac{n}{\ell}}d\xi\, C^{\frac{n}{\ell}}.$$

従って trace formula より

$$\sum\frac{1}{\mu_i+\lambda} = \int p(x)R_\lambda(x,x)\,dx$$
$$= C\lambda^{\frac{n}{\ell}-1} + o(\lambda^{\frac{n}{\ell}-1}).$$

Hardy-Littlewood の Tauber型定理より前の事実が得られる.

一般の場合には、反復法を用いて証明する。

$p(x) \in K_\ell\ (\ell > 0)$ であるので、$\forall k > 0$ に対して

$p^{\frac{k}{2}}(A+r)p^{-\frac{k}{2}}$ は $B^\infty(R^n)$ 係数の一様楕円型作用素。

$B_k = [p^{\frac{k}{2}}(A+r)p^{-\frac{k}{2}}]^a$ ([$]^a$ は closure を意味する)。明らかに $\mathcal{D}(B_k) = H^m(R^n)$ である。

(補題) $[p^{\frac{k}{2}}(A+r)^{-1}p^{-\frac{k}{2}}]^a$ は $L^2(R^n)$ の有界作用素。

従って $B_k^{-1} = [p^{\frac{k}{2}}(A+r)^{-1}p^{-\frac{k}{2}}]^a$

(ii) 例えば $A = -\Delta$ のとき。

$$C p^{\frac{k}{2}}(x)\, e^{-\sqrt{r}|x-y|}/|x-y| \cdot p^{-\frac{k}{2}}(y) = K(x,y)$$ とおくと

Peetre の不等式より $|p^{\frac{k}{2}}(x)\,p(y)^{-\frac{k}{2}}| \le C(1+|x-y|)^{\frac{k\ell}{2}}$

故に $$|K(x,y)| \le C(1+|x-y|)^{\frac{k\ell}{2}} e^{-\sqrt{r}|x-y|}/|x-y| = G(x-y).$$

$G(x)$ は L^1 に属する。convolution 核の性質により主張が従う。この論法は一般の定数係数の場合にも適用され得る。(即ち $(A+r)^{-1}$ の kernel が十分遠方で急減少、原点での特異性が空間次元より小さいこと)。

更に、仮定を満足する変数係数の場合にも成立する。

$|a_\alpha(x) - a_\alpha| \le C|x|^{-\delta}$ (十分遠方で) より

$\exists \alpha > 0$ s.t. $p^{-\alpha} = O(|x|^{-\delta})$ とすれば、

よく知られた Resolvent equation

$$p^\alpha (A+r)^{-1} p^{-\alpha} = p^\alpha (A_0+r) p^{-\alpha} + B.$$

ここで $B=\rho^{\alpha}(A+r)^{-1}(A_0-A)\rho^{-\alpha}\cdot\rho^{\alpha}(A_0+r)^{-1}\rho^{-\alpha}$.
$(A_0-A)\rho^{-\alpha}$ は有界係数をもつ微分作用素であるので

$\rho^{\alpha}(A+r)^{-1}\rho^{-\alpha}$ は $L^2(R^n)$ の中で有界作用素である.

更に. $\rho^{2\alpha}(A+r)^{-1}\rho^{-2\alpha}$

$$=\rho^{2\alpha}(A_0+r)^{-1}\rho^{-2\alpha}+\rho^{\alpha}\cdot\rho^{\alpha}(A+r)^{-1}\rho^{-\alpha}\cdot\rho^{\alpha}(A_0-A)\rho^{-2\alpha}\cdot\rho^{2\alpha}(A_0+r)^{-1}\rho^{-2\alpha}$$

前の議論により $\rho^{\alpha}(A+r)^{-1}\rho^{-\alpha}$ は有界作用素として拡張され, $\rho^{\alpha}(A_0-A)\rho^{-2\alpha}$ は有界係数をもつ微分作用素. 従って $\rho^{2\alpha}(A+r)^{-1}\rho^{-2\alpha}$ は有界作用素. この議論をくり返せば, 主張は従う.

上の補題から次のことは容易に証明される.

$$\rho^{\frac{k}{2}}(A+r)^{-1}=B_k^{-1}\rho^{\frac{k}{2}},\qquad (A+r)^{-1}\rho^{\frac{k}{2}}=\rho^{\frac{k}{2}}(B_k^{*})^{-1}$$

今 k(奇数), $k=2s+1$ (s: 正の整数) s.t. $km>n$, $kl>n$

$(\rho^{\frac{1}{2}}(A+r)^{-1}\rho^{\frac{1}{2}})^{k}=\rho^{\frac{k}{2}}\tilde{A}^{-1}\rho^{\frac{k}{2}}$. と書き換えることが出来る, ここで $\tilde{A}=B_sB_{s-1}\cdots B_1(A+r)\cdot B_1^{*}\cdots B_s^{*}$.

$\tilde{A}$ は (km階) の $\mathcal{B}^{\infty}$-係数の一様楕円型作用素で,

$\mathcal{D}(\tilde{A})=H^{km}(R^n)$. で 更に正値な自己共役作用素である, 即ち $\tilde{A}\geq c>0$

$\tilde{A}-c_1$ ($c_1<c$), ρ^{k} ($\rho^{k}\in L^1$) をそれぞれ, 前の議論の A, ρ として適用すれば, 全く同様の議論によって, 結果を得ることが出来る.

次の i) と iii) の結果について簡単にふれる.

i) は $\lim \lambda^{1-\frac{n}{m}} R_\lambda(x, x) = (2\pi)^{-n} p(x)^{\frac{n}{m}-1} \int (A'(\xi, x)+1)^{-1} d\xi$.

as $\lambda \to \infty$ (各点収束). しかも,

$p(x) \in K_\ell\ (\ell > m)$ より $p(x) \in L^{\frac{n}{m}}(R^n)$.,

一方 $|\lambda^{\frac{n}{m}} p(x) R_\lambda(x, x)| \leq C p(x)^{\frac{n}{m}}$ が容易に証明されるから. Lebesgue 収束定理より従う.

iii) は Korenblyum の Tauberian Theorem を適用する. (又は, この Tauberian Theorem を適用することによって, iii) の結果をもう少し一般化することが可能). 次の定理がそれである.

$\varphi(t), \psi(t) \geq 0$. 単調増加函数.

$\alpha^\exists \gamma < 1$, $\varphi(t_1)/\varphi(t_2) \leq C(t_1/t_2)^\gamma$. (十分大きな $t_1 > t_2$).

かつ $\lim \varphi(t) = \infty$. as $t \to \infty$

$f(x) = \int_0^\infty (t+x)^{-1} d\varphi(t)$, $g(x) = \int_0^\infty (t+x)^{-1} d\psi(t)$.

のとき, $f(x)/g(x) \longrightarrow 1$ as $x \to \infty$, $\varphi(t)/\psi(t) \to 1$ as $t \to \infty$.

iii) の場合と同じ証明から

$$|R_\lambda(x, x) - (1+\lambda p(x))^{\frac{n}{m}-1} E|$$

$$\leq \varepsilon (1+\lambda p(x))^{\frac{n}{m}-1} + C(\varepsilon)(1+\lambda p(x))^{\frac{n}{m}-1}.$$

ここで $E = (2\pi)^{-n} \int (A'(\xi)+1)^{-1} d\xi$. である.

claim 1. $\int p(x)(1+\lambda p(x))^{\frac{n}{m}-1} dx \Big/ \int p(x)(1+\lambda p(x))^{\frac{n}{m}-1} dx \longrightarrow 0$

as $\lambda \to \infty$.

従って.

$$\sum_i \frac{1}{\mu_i+\lambda} = E\int p(x)(1+\lambda p(x))^{\frac{n}{m}-1}dx + o\left(\int p(x)(1+\lambda p(x))^{\frac{n}{m}-1}dx\right)$$

ここで, $\varphi(t)=\int_{tp(x)\geq 1}(tp(x)-1)^{\frac{n}{m}}dx$. とおくと

claim 2. $\varphi(t)$ は Tauberian Theorem の仮定を満足し. かつ,

$$\int p(x)(1+\lambda p(x))^{\frac{n}{m}-1}dx = \left(\frac{n}{m}\pi\right)^{-1}\sin\frac{n}{m}\pi\int_0^\infty (t+\lambda)^{-1}d\varphi(t).$$

この事実から (1) の主張が従う. //

参考文献.

(1) S. Agmon,
C. P. A. M. Vol 18. (1965). 627～663.

(2) M. Š. Birman.
Math. Sb. 55. (1961) 125～174.
A. M. S. Transl. 53. 23～80.

(3). M. Š. Birman – M. Z. Solomyak.
Functional analysis and its application
Vol 4. no. 4. 1–13. (1970)

(4) M. Š. Birman – V. V. Borzov.
Problem in Math. Physics. Vol 5.
Edited by Birman. 24–38. (1971).